الأسس والجذور

أهداف الوحدة

أن يكون الطالب قادراً على أن :

١- يتذكر القوانين الأساسية للأسس

٢- يكون قادراً على أجراء العمليات الحسابية

٣- يعرف مفهوم الدالة الأسية . ٤- يتذكر مفهوم الأسس و الجذور

٥- يتدرب على حل أنواع مختلفة من تمارين الأسس و الجذور

٦- يفرق بين مفهوم الأس و الجذر

دروس الوحدة

١- القوانين الأساسية للأسس

٢- الدالة الأسية

٣- الجـــــــذور

٤- العمليات الحسابية على الجذور الصماء

الصفحة الرئيسية

الدرس الأول : القوانين الأساسية للأسس

إعداد الأستاذ / خالد سويسة

الصفحة الرئيسية

أولاً : القوانين الأساسية للأسس

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، م ، ن ، هـ ∈ ن فإن :

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

مثال : $٣^{٢} \times ٣^{٣} = ٣^{٥}$

(٢) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

حيث أ ≠ صفر

مثال : $٤^{٥} \div ٤^{٣} = ٤^{٢}$

(٣) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

مثال : $(٥^{٣})^{٤} = ٥^{١٢}$

(٤) $(أ^{م} ب^{ن})^{هـ} = أ^{م هـ} ب^{ن هـ}$

مثال: $(٣^{٢} \times ٥^{٣})^{٢} = ٣^{٤} \times ٥^{٦}$

(٥) $(أ^{م} \div ب^{ن})^{هـ} = أ^{م هـ} \div ب^{ن هـ}$

حيث ب ≠ صفر

ملاحظة :

$(أ^{م} + ب^{ن})^{هـ} \neq أ^{م هـ} + ب^{ن هـ}$

الصفحة الرئيسية

ثانياً : الاستنتاجات :

(١) $أ^{صفر} = ١$ حيث أ ≠ ٠

(٢) $١^{ن} = ١$

(٣) $أ^{م} = \frac{١}{أ^{-م}}$ حيث أ ≠ ٠

(٤) $أ^{-م} = \frac{١}{أ^{م}}$ حيث أ ≠ ٠

(٥) $(\frac{أ}{ب})^{-م} = (\frac{ب}{أ})^{م}$ حيث أ ، ب ≠ ٠

مثال :

$(\frac{٢}{٣})^{-٣} = (\frac{٣}{٢})^{٣}$

الصفحة الرئيسية

مثال (١) أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $أ^{٣} \times أ^{٢} \times أ^{٤} = أ^{٩}$

(٢) $س^{٢} \times س^{\frac{١}{٤}} \times س^{\frac{-٣}{٤}} = س^{\frac{٣}{٢}}$

(٣) $(٦٤)^{\frac{١}{٣}} = (٤^{٣})^{\frac{١}{٣}} = ٤$

(٤) $(٣^{-٥})^{-٢} \times (٣^{٤})^{-٢} = ٣^{١٠} \times ٣^{-٨} = ٣^{٢} = ٩$

(٥) $\dfrac{(س + ٥)^{٢} \times (س + ٥)^{-٤}}{(س + ٥)^{-٢} \times (س + ٥)^{-٣}}$ حيث س $\neq$ -٥

$= \dfrac{(س + ٥)^{-٢}}{(س + ٥)^{-٥}} = (س + ٥)^{٣}$

أ / خالد سويسة

قاعدة هامة

(١) إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن} \Leftrightarrow م = ن$ ، $أ \in ح - \{ ١ ، -١ ، ٠ \}$

مثال : $٣^{س} = ٨١$ فإن $٣^{س} = ٣^{٤}$

$س = ٤$

(٢) إذا كان : $أ^{م} = ب^{م} \Leftrightarrow أ = ب$ لكل $م \in ص^{+}$ ، وإذا كانت $أ \neq ب \neq ٠$

فإن : م = صفر

مثال : $٥^{س-٤} = ٨^{س-٤}$ فإن $س - ٤ = ٠$

$س = ٤$

(3) $أ^{م} = ب^{م} \Leftrightarrow أ = ب$ لكل $م \in ص^{+}$ ، م عدد فردى

$أ = \pm ب$ لكل $م \in ص^{+}$ ، م عدد زوجى

أ / خالد سويسة
الصفحة الرئيسية

مثال : أوجد قيمة س إذا كانت

(١) $٥^{س-٢} = ١٢٥$

الحـــــــل

$٥^{س-٢} = ٥^{٣}$

س – ٢ = ٣

س = ٥

---

(٢) $(٢٥)^{س-١} = (١٢٥)^{-س}$

الحـــــــل

$(٥^{٢})^{س-١} = (٥^{٣})^{-س}$

$(٥)^{٢س-٢} = (٥)^{-٣س}$

$٢س^{٢} - ٢ = -٣س$

$٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

ومنها ٢س - ١ = ٠ أ، س + ٢ = ٠

س = $\frac{١}{٢}$ س = - ٢

---

(٣) $س^{\frac{١}{٣}} = ٢$

الحـــــــل

$س^{\frac{١}{٣}} = (٢^{٣})^{\frac{١}{٣}}$

س = $٢^{٣}$ = ٨

أ / خالد سويسة
الصفحة الرئيسية

مثال : أوجد قيمة ما يأتى

(١) $$\frac{(١٠)^{\text{س}}}{(٢٥)^{\frac{١}{٢}\text{س}} \times (٣٢)^{\frac{١}{٥}(\text{س}-١)}}$$

الحـــــل

$$\frac{٥^{\text{س}} \times ٢^{\text{س}}}{(٥^{٢})^{\frac{١}{٢}\text{س}} \times (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}(\text{س}-١)}}$$

$$= \frac{٥^{\text{س}} \times ٢^{\text{س}}}{٥^{\text{س}} \times ٢^{\text{س}-١}}$$

$$= ٢^{\text{س}-\text{س}+١} = ٢$$

(٢) $$\frac{٢٥^{\text{س}+٣} \times ١٠^{\text{س}} \times ٨^{\text{س}+٢}}{٥^{٣\text{س}+٥} \times ١٦^{\text{س}+٢}}$$

الحـــــل

$$\frac{(٥^{٢})^{\text{س}+٣} \times (٢\times٥)^{\text{س}} \times (٢^{٣})^{\text{س}+٢}}{٥^{٣\text{س}+٥} \times (٢^{٤})^{\text{س}+٢}}$$

$$= \frac{٥^{٢\text{س}+٦} \times ٢^{\text{س}} \times ٥^{\text{س}} \times ٢^{٣\text{س}+٦}}{٥^{٣\text{س}+٥} \times ٢^{٤\text{س}+٨}}$$

$$= ٥^{٢\text{س}+٦+\text{س}-٣\text{س}-٥} \times ٢^{\text{س}+٣\text{س}+٦-٤\text{س}-٨}$$

$$= ٥ \times ٢^{-٢}$$

$$= \frac{٥}{٢^{٢}}$$

$$= \frac{٥}{٤}$$

الصفحة الرئيسية

مثال : أثبت أن :

(١) $\frac{(١٠)^{٣س+٢}}{(١٢٥)^{س+\frac{٢}{٣}} \times (٨)^{س+١}} = \frac{١}{٢}$

الحـــــل

الأيمن $= \frac{٥^{٣س+٢} \times ٢^{٣س+٢}}{(٥^{٣})^{س+\frac{٢}{٣}} \times (٢^{٣})^{س+١}}$

$= \frac{٥^{\cancel{٣س+٢}} \times ٢^{٣س+٢}}{٥^{\cancel{٣س+٢}} \times ٢^{٣س+٣}}$

$= ٢^{\cancel{٣س}+٢-\cancel{٣س}-٣}$

$= ٢^{-١}$

$= \frac{١}{٢}$ = الأيسر

(٢) $\frac{(١٠٠)^{٢س-١} \times (٢٥)^{س+١}}{(١٦)^{س-١} \times (١٢٥)^{٢س}} = ٤$

الحـــــل

الأيمن $= \frac{(٢^{٢} \times ٥^{٢})^{٢س-١} \times (٥^{٢})^{س+١}}{(٢^{٤})^{س-١} \times (٥^{٣})^{٢س}}$

$= \frac{٢^{٤س-٢} \times ٥^{٤س-٢} \times ٥^{٢س+٢}}{٢^{٤س-٤} \times ٥^{٦س}}$

$= ٢^{\cancel{٤س}-٢-\cancel{٤س}+٤} \times ٥^{\cancel{٤س}-٢+\cancel{٢س}+٢-\cancel{٦س}}$

$= ٢^{٢} = ٤ =$ الأيسر

الصفحة الرئيسية

تمرين (١)

(١) أختصر إلى أبسط صورة :

(أ) $\frac{٧ \times ١٥ \times}{٢١ \times ٥ \times}$

(ب) $\frac{٢٥ \times ١٠ \times ٨ \times}{٥ \times ٨ \times}$

(جـ) $\frac{(١٢١)^{\frac{٣}{٢}} \times (٢٢)^{-٣}}{(١٦)^{-\frac{٣}{٤}}}$

(٢) أثبت أن

(أ) $\frac{(١٥)^{}}{(١٢٥)^{\frac{١}{٣}} \times (٩)^{\frac{١}{٣}}} = ١$

(ب) $\frac{(٤٠)^{-١} \times (٣٢)^{٢} \times ٢٥}{٥ \times (\frac{١}{٤})^{-٢}} = ٨$

الصفحة الرئيسية

محافظة البحيرة

مدرسة: عمر كامل الوكيل الثانوية بنات بدمنهور

الدالة الأ سية

للصف الثانى الثانوى

إعداد الأستاذ / خالد سويسة

الصفحة الرئيسية

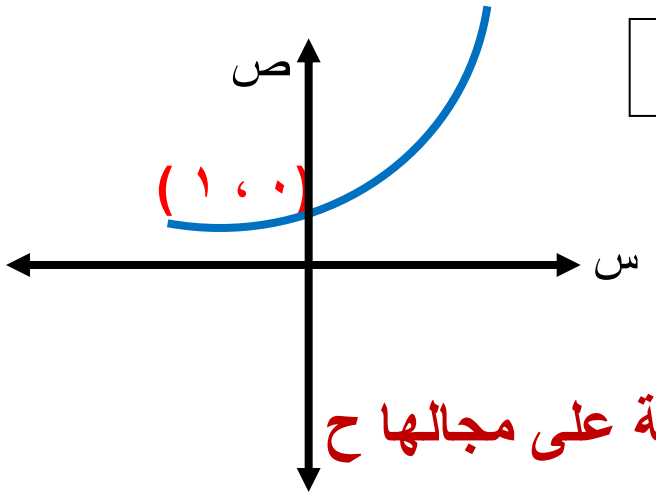
الدالة الأسية

الدالة الأسية هى الدالة التى تكون على الصورة :

ص = أ ^{س} ، د (س) = أ ^{س} حيث أ ∈ ح $^{+}$ ، أ ≠ ١

الشكل العام لمنحنى الدالة : د (س) = أ ^{س} كما هو موضح بالشكلين التاليين :

عندما أ > ١

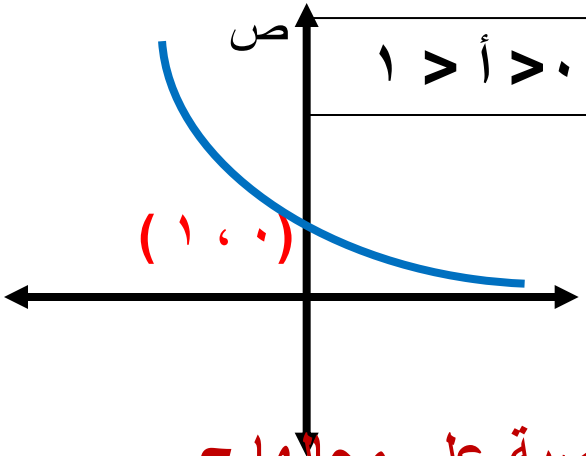


الدالة تزايدية على مجالها ح

(تسمى دالة نمو أسى معامله أ)

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

عندما ٠ < أ < ١



الدالة تناقصية على مجالها ح

(تسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ)

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

مدى الدالة = ح $^{+}$ =] ٠ ، ∞ [

الصفحة الرئيسية

بعض التحويلات الهنسية للدالة د : د (س) = أ ^{س}

(١) الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت :د (س) = أ ^{س} فإن المنحنى د (س) = أ ^{س} + جـ

يمثل بيانيا المنحنى د (س) = أ ^{س} بإزاحة رأسية مقدارها | جـ |

فى إتجاه $\overleftarrow{و ص}$ إذا كانت جـ > ٠ (إزاحة لأعلى)

فى إتجاه $\overleftarrow{و ص}$ / إذا كانت جـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

(٢) الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت :د (س) = أ ^{س} فإن المنحنى د (س) = أ $^{س+ ب}$

يمثل بيانيا المنحنى د (س) = أ ^{س} بإزاحة أفقية مقدارها | ب |

فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$ إذا كانت ب < ٠

فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$ / إذا كانت ب > ٠

الصفحة الرئيسية

(٣) انعكاس منحنى الدالة الأسية في محور السينات :

إذا كانت :د (س) = أ ^{س} فإن المنحنى ص = - د (س)

أى : د (س) = ـ أ ^{س} هو صورة المنحنى د (س) = أ ^{س} بالانعكاس فى محور السينات

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

مثال (١) أشترى أسامة مزرعة بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠جنيه فإذا كانت سعر المزرعة يزداد بمعدل ٢.٥ ٪ كل سنة .

١- اكتب دالة أسية تمثل سعر المزرعة بعد " ن " سنة من شرائه

٢- قدر لأقرب جنيه سعر المزرعة بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحـــــــل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، ر = ٠.٠٢٥ ، ن = ٦

(1) دالة النمو الأسى د : د (ن) = أ (١ + ر) ^{ن}

د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١ + ٠.٠٢٥) ^{ن} = ١٣٥٠٠٠٠ × (١.٠٢٥) ^{ن}

(٢) بالتعويض عن ن = ٦

فإن : د(٦) = ١٣٥٠٠٠٠ (١.٠٢٥)^{٦} = ١٥٦٥٥٨٦ جنيها

الصفحة الرئيسية

الربح المركب

عند حساب الجملة لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحاً سنوياً مركباً (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة : $جـ = أ (١ + \frac{ر}{س})^{ن س}$

مثال (٢) أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧ ٪ أوجد هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوى (٢) العائد ربع سنوى (٣) العائد شهرى

الحـــــــل

أ = ١٥٠٠٠ ، ر = ٠.٠٧ $جـ = أ (١ + \frac{ر}{س})^{ن س}$

(1) العائد سنوى فإن : س = ١

$جـ = ١٥٠٠٠ (١ + ٠.٠٧)^{١٠} = ٢٩٥٠٧.٢٧$ جنيه

(٢) العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤ فإن : س = ٤

$جـ = ١٥٠٠٠ (١ + \frac{٠.٠٧}{٤})^{١٠ \times ٤} = ٣٠٠٢٣.٦٩$ جنيه

(٣)العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ فإن : س = ١٢

$جـ = ١٥٠٠٠ (١ + \frac{٠.٠٧}{١٢})^{١٠ \times ١٢} = ٣٠١٤٤.٩٢$ جنيه

الصفحة الرئيسية

التضاؤل الأسى

الدالة د : د (ن) = أ (١ – ر) ^{ن} تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسى حيث أ القيمة الإبتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الوحدة ، ن الفترة الزمنية

مثال (٣) يتناقص إنتاج منجم ذهب سنوياً بمقدار ٥ ٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة

الحـــــــــل

أ = ٢٥٤ ، ر = ٠.٠٥ ، ن = ٩

دالة الأسية د : د (ن) = ٢٥٤ (١ – ٠.٠٥) ^{ن}

= ٢٥٤ (٠.٩٥) ^{ن}

بالتعويض عن ن = ٩

فإن : د(٩) = ٢٥٤ (٠.٩٥)^{٩} = ١٦٠ كجم

الصفحة الرئيسية

الدالة الأسية

الدالة الأسية هى الدالة التى تكون على الصورة :

ص = أ^{س} ، د (س) = أ^{س} حيث أ ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١

مثال(١) : إذا كان د (س) = ٢^{س} فأوجد قيمة :

د (-٣) ، د (٠) ، د (٢) ، د (أ) ، د (س+١) ، د ($\frac{١}{٣}$)

الحـــــــل

د (-٣) = ٢$^{-٣}$ = $(\frac{١}{٢})^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$

د (٠) = ٢^{٠} = ١

د (٢) = ٢^{٢} = ٤

د (أ) = ٢^{أ}

د (س + ١) = ٢$^{س+١}$

د ($\frac{١}{٣}$) = ٢$^{\frac{١}{٣}}$

مثال : (٢) إذا كان د (س) = ٢ ^{س} حل المعادلة

د (س + ٢) + د (س – ٢) = ١٣٦

الحـــــــــل

$٢^{س+٢} + ٢^{س-٢} = ١٣٦$

$٢^{س-٢} (٢^{٤} + ١) = ١٣٦$

$٢^{س-٢} (١٦ + ١) = ١٣٦$

$٢^{س-٢} \times ١٧ = ١٣٦$ بالقسمة على ١٧

$٢^{س-٢} = ٨ = ٢^{٣}$

س – ٢ = ٣

س = ٥

مثال (٣) إذا كانت د (س) = ٣ ^{س}

فأوجد مجموعة حل المعادلة

د (٢س) - ٨ د (س) = ٩

الحـــــــــل

$٣^{٢س} - ٨ \times ٣^{س} - ٩ = ٠$

$(٣^{س} - ٩) (٣^{س} + ١) = ٠$

ومنها $٣^{س} = ٩ = ٣^{٢}$ فإن س = ٢

أ، $٣^{س} = -١$ وهذا مرفوض

م ٠ ح = { ٢ }

الصفحة الرئيسية

تمارين (٢)

(١) إذا كانت د (س) = ٣ ^{س} فحل المعادلة

د (س – ٢) + د (س – ١) + د (س) = ١١٧

(٢) إذا كانت د (س) = ٣ ^{س} أوجد مجموعة حل المعادلة :

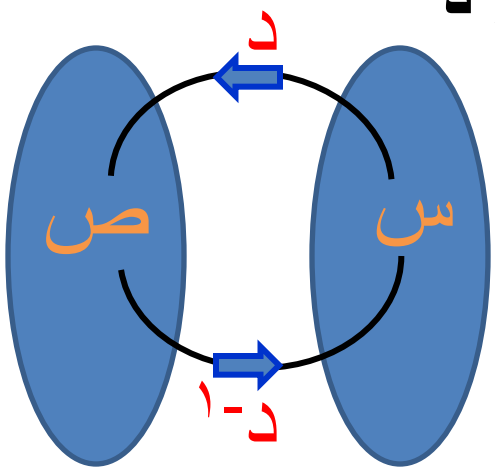
د (س + ١) + د (س – ١) = ٩٠

(٣) إذا كانت د (س) = ٥ ^{س}

أوجد قيمة $\frac{\text{د (س) - د (س – ١)}}{\text{د (س + ١) – د (س)}}$

الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإن كل عنصر ص فى المدى يناظره عنصر وحيد س فى المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز $د^{-1}$



بحيث $د^{-1}$ (ص) = س

أى أن : إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د

فإن : (ص ، س) ∈ بيان $د^{-1}$

مثال (١) :

إذا كانت الدالة د المعرفة من المجموعة س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

إلى المجموعة ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } وكانت د(س) = س + ٢

(1) أوجد بيان د$^{-1}$ (٢) أوجد قاعدة الدالة د$^{-1}$

الحـــــــــل

د(٢) = ٢+٢ = ٤ ، د(٣) = ٢+٣ =٥ ، د(٤) = ٢+٤ =٦ ،

د(٥) = ٢+٥ =٧ نجد بيان د = {(٢،٤) ، (٣،٥) ، (٤،٦) ، (٥،٧) }

د دالة أحادية ، مدى د = ص

∴ بيان د$^{-1}$ = {(٤،٢) ، (٥،٣) ، (٦،٤) ، (٧،٥) }

لإيجاد قاعدة الدالة د$^{-1}$ نقوم بتبديل المتغيرين س ، ص

نجد أن : س = ص + ٢ ومنها ص = س – ٢

د$^{-1}$ (س) = س – ٢

مثال :(٢)

أوجد الدالة العكسية للدالة د: د(س) = ٣س –٢ومثل الدالة ومعكوسها بيانيا فى شكل واحد

الحـــــــــــل

لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد قيمة ص بدلالة س

ص = ٣س – ٢

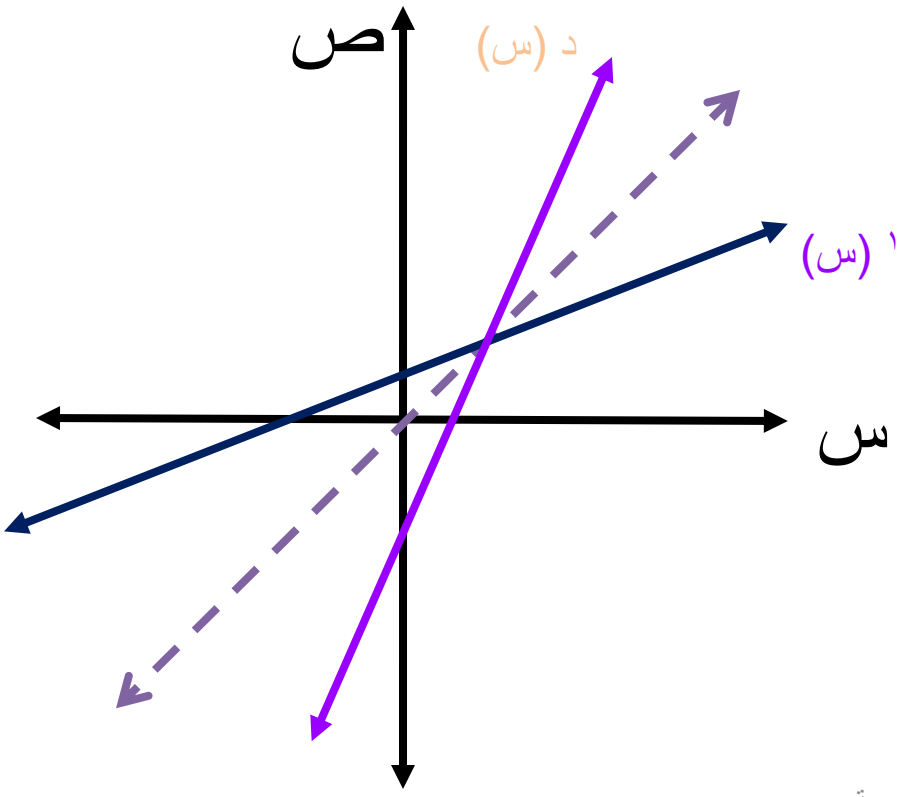
بتبديل المتغيرين

س = ٣ص – ٢

٣ص = س + ٢

$ص = \frac{١}{٣}(س + ٢)$

$د^{-١}(س) = \frac{١}{٣}(س + ٢)$



ملاحظات هامة

(١) $د(س) \neq \frac{١}{د^{-١}(س)}$

(٢) الدالتين د ، $د^{-١}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

(٣) مجال د = مدى الدالة العكسية $د^{-١}$

، ومدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-١}$

(٤) يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للآخرى إذا كان :

(د ○ ر) (س) = س ، (ر ○ د) (س) = س

مثال إذا كانت د :دالة حيث د(س) = ٢ + س – ٣ فأوجد :

(١) مجال ومدى الدالة د (٢) د$^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى د$^{-١}$

الحـــــــــل

∵ د(س) = ٢ + س – ٣

∴ س – ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣

∴ المجال د = [٣ ، ∞ [

∵ س – ٣ ≥ ٠ بإضافة ٢ للطرفين

٢ + س – ٣ ≥ ٢

∴ ص ≥ ٢

∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞ [

∵ ص = ٢ + س – ٣

حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢ بتبديل المتغيرات

∴ س = ٢ + ص – ٣

حيث ص ≥ ٣ ، س ≥ ٢

∴ س – ٢ = ص – ٣ بتربيع الطرفين

(س – ٢)^{٢} = ص – ٣

ص = (س – ٢)^{٢} + ٣

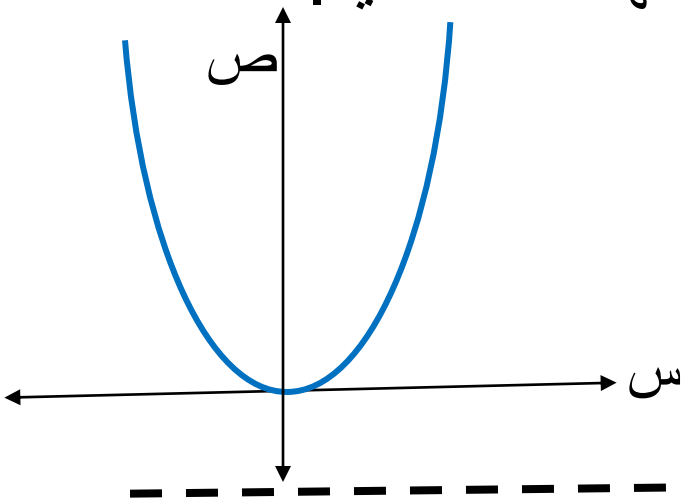
د$^{-١}$ (س) = (س – ٢)^{٢} + ٣

حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

مجال د$^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞ [

، مدى د$^{-١}$ = مجال د = [٣ ، ∞ [

مثال هل الدالة د : د(س) = س^{٢} يكون لها دالة عكسية ، وإذا كانت ليست لها دالة عكسية فعين المجال الذى يكون لها دالة عكسية.



الحـــــــل

∵ مجال الدالة = ح

∵ الدالة ليست أحادية

∴ الدالة ليس لها دالة عكسية

إذا كان مجال الدالة د = [٠ ، ∞ [

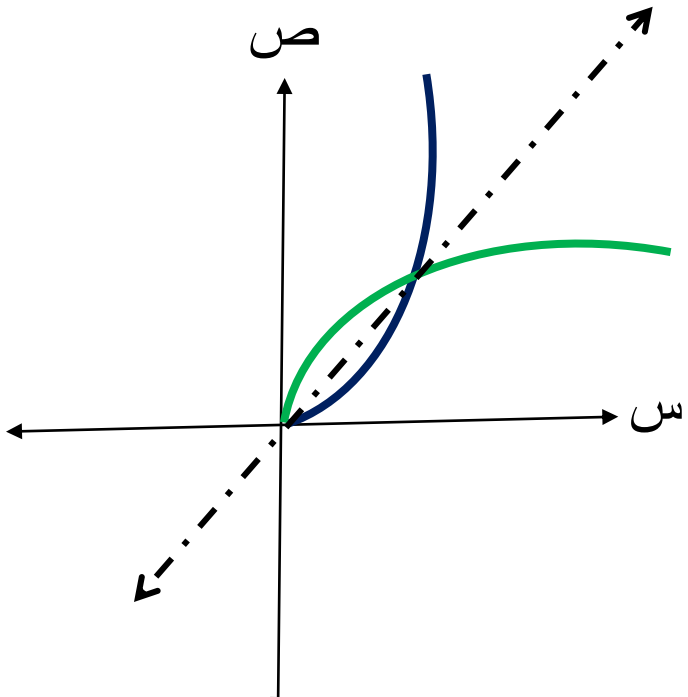
فإن الدالة تكون أحادية

ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية

∵ ص = س^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

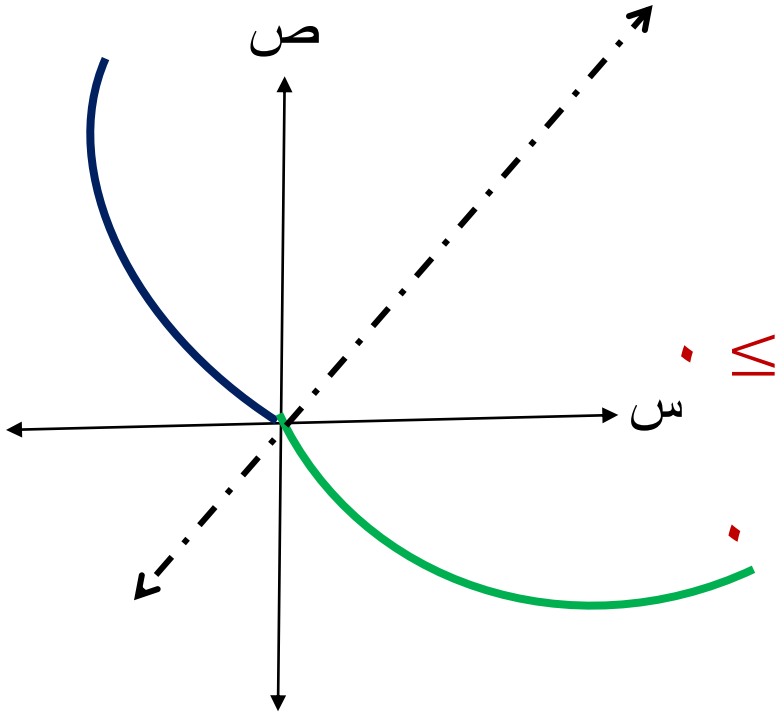
بتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} حيث ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠



∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$



إذا كان مجال الدالة د =] - ∞ ، ٠]

فإن الدالة تكون أحادية

ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية

∵ ص = س^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

بتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} حيث ص ≥ ٠ ، س ≤ ٠

∴ ص = $-\sqrt{\text{س}}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $-\sqrt{\text{س}}$

∴ المجال الذى يكون فيه الدالة د : د (س) = س^{٢} دالة عكسية هو

[٠ ، ∞ [،] ∞ ، ٠]

الجـــذور

إذا كانت س ^{ن} = ب فإن س = $\sqrt[ن]{ب}$

وتسمى س بالجذر النونى للعدد ب ، ويسمى ب العدد المجذور ،
ويسمى ن دليل الجذر حيث ن ∈ ص $_{+}$ ، ن > ١

مثال :

إذا كان ٨١ = ٣ ^{٤} فإن : $\sqrt[٤]{٨١}$ = ٣

إذا كان -٣٢ = (-٢) ^{٥} فإن : $\sqrt[٥]{-٣٢}$ = -٢

نتيجة

$(\sqrt[ن]{أ})^{ن}$ = أ

مثال : $(\sqrt[٣]{٩})^{٣}$ = ٩