محافظة البحيرة

مدرسة: عمر كامل الوكيل الثانوية بنات بدمنهور

الدالة اللوغاريتمية

للصف الثانى الثانوى

إعداد الأستاذ / خالد محمد السعيد سويسة

اللوغاريتمات

أهداف الوحدة

أن يكون الطالب قادراً على أن :

١- يعرف معنى الدالة اللوغاريتمية.

٢- يتذكر حل المعادلة الأسية.

٣- يتقن حل المعادلة اللوغاريتمية.

٤- يعرف قوانين اللوغاريتمات.

٥- يفرق بين اللوغاريتمات المعتادة وغيرها.

الدالة اللوغاريتمية

إذا كانت ص = $أ^{س}$ $\Leftrightarrow$ س = $لو_{أ}$ ص

وتقرأ : س = لوغاريتم العدد ص للأساس أ ، حيث أ ∈ ح$^{+}$ - {١}

مثال : أكتب الصورة اللوغاريتمية لكل مما يأتى

إذا كان ٨١ = ٣^{٤} فإن : $لو_{٣}$ ٨١ = ٤

إذا كان ٣٢ = ٢^{٥} فإن : $لو_{٢}$ ٣٢ = ٥

إذا كان ٦٤ = ٤^{٣} فإن : $لو_{٤}$ ٦٤ = ٣

إذا كان ٣ = (٢٤٣)$^{\frac{١}{٥}}$ فإن : $لو_{٢٤٣}$ ٣ = $\frac{١}{٥}$

مثال : أكتب الصورة الأسية لكل مما يأتى

إذا كان $\log_{5} ٦٢٥ = ٤$ فإن : $٦٢٥ = ٥^{٤}$

إذا كان $\log_{٢} ٨ = ٣$ فإن : $٨ = ٢^{٣}$

إذا كان $\log_{٧} ٣٤٣ = ٣$ فإن : $٣٤٣ = ٧^{٣}$

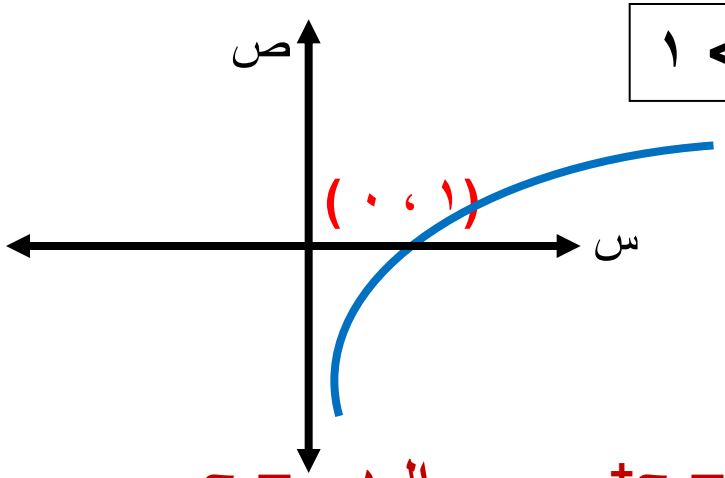
إذا كان $\log_{٢٤٣} ٣ = \frac{١}{٥}$ فإن : $٣ = (٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}$

الدالة اللوغاريتمية

إذا كانت ص = أ^س ⟺ لوأ ص = س حيث أ ∈ ح^+ ، أ ≠ ١

الشكل العام لمنحنى الدالة : د (س) = لوأ س كما هو موضح بالشكلين التاليين :

عندما أ > ١



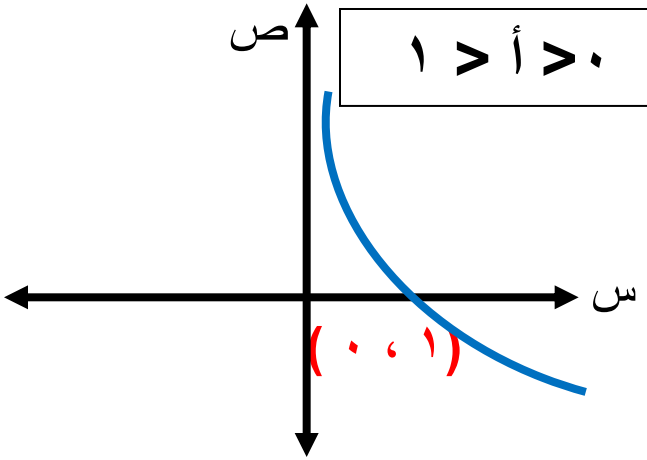
المجال = ح^+ ، المدى = ح

الدالة تزايدية على مجالها ح^+

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

الدالة أحادية

عندما ٠ < أ < ١



المجال = ح^+ ، المدى = ح

الدالة تناقصية على مجالها ح^+

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

الدالة أحادية

الصفحة الرئيسية

خواص الدوال اللوغاريتمية :

نطاق الدالة هو قيم ص وهو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح $^{+}$ فقط

١- لا يوجد لوغاريتم لأى عدد سالب

٢- الدالة اللوغاريتمية تزايدية إذا كانت أ > ١ ، ∞ [

٣- الدالة اللوغاريتمية تناقصية إذا كانت أ > ٠ ، ١ [

٤-إذا كانت لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن س = ص والعكس صحيح الدالة احادية

٥- الدالة اللوغاريتمية هى الدولة العكسية للدالة الأسية.

التحويلات الهندسية للدالة اللوغار يتمية

(١) إذا كانت : د(س) = لو$_{أ}$ س + جـ فإن منحنى الدالة يكون صورة منحنى
الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س بإزاحة رأسية فى اتجاه محور الصادات
إذا كانت جـ > ٠ فإن المنحنى ازيح رأسيا لأعلى بمقدار جـ فى اتجاه وص
إذا كانت جـ < ٠ فإن المنحنى ازيح رأسيا لأسفل بمقدار |جـ| فى اتجاه وص/

---

(٢) إذا كانت : د(س) = لو$_{أ}$ (س + ب) فإن منحنى الدالة يكون صورة منحنى
الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س بإزاحة أفقية فى اتجاه محور السينات
إذا كانت ب > ٠ فإن المنحنى ازيح أفقيا بمقدار ب فى اتجاه وس/
إذا كانت ب < ٠ فإن المنحنى ازيح أفقيا بمقدار |ب| فى اتجاه وس

---

(٣) إذا كانت : د(س) = ـ لو$_{أ}$ س فإن منحنى الدالة يكون صورة منحنى
الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س بالإنعكاس فى محور السينات.

---

(٤) إذا كانت : د(س) = لو$_{أ}$ (ـ س) فإن منحنى الدالة يكون صورة منحنى
الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س بالإنعكاس فى محور الصادات.
ومجال الدالة =] - ∞ ، ٠ [أى س < صفر

حل المعادلات اللوغاريتمية

المعادلة : س = لوأ ص يوجد فيها ثلاث قيم مجهولة وهى س ، ص ، أ
إذا علم اثنان منهما أمكن حلها وإيجاد قيمة المجهول الثالث .

طريقة الحل : تحول المعادلة اللوغاريتمية إلى معادلة أسية

مثال : أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $\log_{٣} ٨١$

الحـــل

نضع $\log_{٣} ٨١ = س$

$٣^{س} = ٨١ = ٣^{٤}$

س = ٤

(٢) $\log_{\frac{١}{١٠}} ٠.٠٠٠١$

الحـــل

نضع $\log_{\frac{١}{١٠}} ٠.٠٠٠١ = س$

$(\frac{١}{١٠})^{س} = ٠.٠٠٠١ = \frac{١}{١٠٠٠}$

$= (\frac{١}{١٠})^{٣}$

س = ٣

الصفحة الرئيسية

(٣) $\log_{10} ١٠٠٠$

الحـــل

نضع $\log_{10} ١٠٠٠ = س$

$١٠^{س} = ١٠٠٠ = ١٠^{٣}$

س = ٣

---

(٤) $\log_{\frac{٣}{٥}} \frac{٦٢٥}{٨١}$

الحـــل

نضع $\log_{\frac{٣}{٥}} \frac{٦٢٥}{٨١} = س$

$(\frac{٣}{٥})^{س} = \frac{٦٢٥}{٨١} = (\frac{٣}{٥})^{٤}$

س = ٤

---

(٥) $\log_{\sqrt{٢}} ٤\sqrt{٢}$

الحـــل

نضع $\log_{\sqrt{٢}} ٤\sqrt{٢} = س$

$(\sqrt{٢})^{س} = ٤\sqrt{٢} = ٢ \times \sqrt{٢}^{٤}$

$= (\sqrt{٢})^{٥}$

س = ٥

ملاحظة

هذا النوع من المسائل سوف نقوم بإيجاد قيمة اللوغاريتم باستخدام قوانين اللوغاريتمات.

الصفحة الرئيسية

مثال : حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\log_{٣}$ س = ٤

الحـــل

س = $٣^{٤}$ = ٨١

---

(٢) $\log_{س}$ ٠.٠٠١ = ٣

الحـــل

$س^{٣}$ = ٠.٠٠١ = $\frac{١}{١٠٠٠}$

= $(\frac{١}{١٠})^{٣}$

س = $\frac{١}{١٠}$

(٣) $\log_{٥}$ (٢س – ١) = صفر

الحـــل

٢س – ١ = $٥^{صفر}$ = ١

٢س = ٢ بالقسمة على ٢

س = ١

---

(٤) $\log_{٢}$ (٣س – ٢) = ٤

الحـــل

٣س – ٢ = $٢^{٤}$ = ١٦

٣س = ١٨ بالقسمة على ٣

س = ٦

الصفحة الرئيسية

مثال : حل كل من المعادلات الآتية :

(٥) $\log_{س^2}$ ٦٢٥ = ٤

الحـــل

$(٢س)^{٤} = ٦٢٥ = ٥^{٤}$

٢س = ٥ بالقسمة على ٢

س = ٢.٥

---

(٦) $\log_{\sqrt{س}}$ ١٠٠٠ = ٧

الحـــل

$(١٠)^{٣} = ١٠٠٠ = \sqrt{س}^{٧}$

$\sqrt{س}^{٧} = ٣$ بتربيع الطرفين

س = ٩

---

(٧) $\log_{٣}$ (٢س + ٣) = ٢

الحـــل

$٢س + ٣ = ٣^{٢} = ٩$

٢س = ٩ – ٣ = ٦ بالقسمة على ٢

س = ٣

---

(٨) $\log_{٥}$ ($\frac{س}{٢}$) = ٢

الحـــل

$\frac{س}{٢} = ٥^{٢} = ٢٥$ بالضرب × ٢

س = ٥٠

---

(٩) $\log_{س}$ ٣ = -٢

الحـــل

$(س)^{-٢} = ٣$ برفع الطرفين للقوى $-\frac{١}{٢}$

$س = ٣^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

الصفحة الرئيسية

تمارين (١)

(١) أكمل الجدول الآتى :

المعادلة اللوغاريتمية	المعادلة الأسية	قيمة المجهول
لو٩ س = ٢	.....	س= .....
لو٩ ص = صفر	.....	ص = ...
لو٤ ع = -٤	.....	ع = ...
.....	٢^س = ٣٢	س= .....
.....	١٠^م = ١٠	م = ...

(٢) حل كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية :

(أ) لو٢ ٢= س (ب) لو١٠ ٠.٠٠١ = س

(جـ) لو٢ (٥س – ٢) = ٣ (د) لوس ٢٥ = -٢

الصفحة الرئيسية

قوانين اللوغاريتمات

(١) $\log_{أ}(س \times ص) = \log_{أ} س + \log_{أ} ص$

مثال : $\log_{أ}(س \times س) = \log_{أ} س + \log_{أ} س = \log_{أ} س^{٢} = ٢ \log_{أ} س$

نتيجة : هامة $\log_{أ} س^{ن} = ن \log_{أ} س$

(٢) $\log_{أ}(س \div ص) = \log_{أ} س - \log_{أ} ص$

(٣) $\log_{أ} ١ =$ صفر (٤) $\log_{أ} أ = ١$

نتـــائج :

(١) $\log_{أ} \frac{س \times ص}{ع \times ل} = \log_{أ} س + \log_{أ} ص - \log_{أ} ع - \log_{أ} ل$

(٢) $\log_{أ} س + \log_{أ} ص - \log_{أ} ع = \log_{أ} \frac{س \times ص}{ع}$

الصفحة الرئيسية

تابع النتائج الهامة

(١) $\log_{ص} س = \frac{\log_{أ} س}{\log_{أ} ص}$

(٢) $\log_{ص} س = \frac{١}{\log_{س} ص}$ خاصية المعكوس الضربى

(٣) $\frac{\log س}{\log ص} \neq \log س - \log ص$

(٤) $\log س \times \log ص \neq \log س + \log ص$

(٥) إذا كتبت لو بدون أساس يكون الأساس ١٠ ويسمى الوغاريتم المعتاد

(٦) لو ١٠ = ١ ، لو ١٠٠ = ٢ ، لو ١٠٠٠ = ٣ ، .....

مثال : أوجد ناتج ما يأتى

(١) $\log_{٣} ٨١$

الحـــل

$\log_{٣} ٨١ = \log_{٣} ٣^{٤}$

$= ٤ \log_{٣} ٣$

$= ٤ \times ١ = ٤$

(٢) $\log_{\frac{١}{١٠}} ٠.٠٠١$

الحـــل

$\log_{\frac{١}{١٠}} ٠.٠٠١ = \log_{\frac{١}{١٠}} (\frac{١}{١٠})^{٣}$

$= ٣ \log_{\frac{١}{١٠}} (\frac{١}{١٠})$

$= ٣ \times ١ = ٣$

الصفحة الرئيسية

مثال : اختصر: $\log_{7} ٢٤٣ \div \log_{7} ٢٧$

الحـــل

$$\text{المقدار} = \frac{\log_{7} ٣^{٥}}{\log_{٣} ٣^{٣}} = \frac{٥ \log_{7} ٣}{٣ \log_{7} ٣} = \frac{٥}{٣}$$

مثال : اختصر:

$\log ٦٢٥ - \log ١٢٥ - \log ٥$

الحـــل

المقدار $= \log ٥^{٤} - \log ٥^{٣} - \log ٥$

$= ٤ \log ٥ - ٣ \log ٥ - \log ٥$

$=$ صفر

يترك للطالب إيجاد حل آخر

مثال : إثبت أن : $\frac{٢ \log ٩ \times \log ٨}{\log ٣ \times ٣ \log ٢} = ٤$

الحـــل

$$\text{الأيمن} = \frac{٢ \log ٣^{٢} \times \log ٢^{٣}}{\log ٣ \times ٣ \log ٢}$$

$$= \frac{٤ \log ٣ \times ٣ \log ٢}{\log ٣ \times ٣ \log ٢}$$

$= ٤ =$ الأيسر

مثال : أوجد قيمة : $\log_{٣} ٨١ - \log_{٣} ٢٧$

الحـــل

$$\text{المقدار} = \log_{٣} \frac{٨١}{٢٧}$$

$$= \log_{٣} ٣ = ١$$

الصفحة الرئيسية

مثال : اختصر : $\log_2 ١٠٠٠ + \log_2 ٣٥ - \log_2 ٧٠ - \log_2 ٤٠ - \log_2 ٢٥$

الحـــــل

المقدار $= \log_2 \frac{١٠٠٠ \times ٣٥}{٢٥ \times ٤٠ \times ٧٠} = \log_2 ٢^{-١} = -١ \log_2 ٢ = -١$

مثال : اثبت أن : $\log_2 ٨٢٥$ ينحصر بين ٢ ، ٣

الحـــــل

$٢ = \log ١٠٠$ ، $٣ = \log ١٠٠٠$

$\log ١٠٠ < \log ٨٢٥ < \log ١٠٠٠$

$٢ < \log ٨٢٥ < ٣$

مثال : أوجد : $\log_4 \log_3 \log_2 ٨$

الحـــــل

المقدار $= \log_4 \log_3 \log_2 ٢^{٣} = \log_4 \log_3 \log_2 ٢ = \log_4 \log_3 ٣ = \log_4 ١ =$ صفر

مثال : إذا كان لو ٢ = ٠.٣٠١٠ ، لو ٣ = ٠.٤٧٧١

أوجد لو ٦ ، لو ٩ ، لو ١٢ ، لو ٠.٠٢ ، لو ٠.٠٢٧

الحـــــل

لو ٦ = لو ٢ × ٣ = لو ٢ + لو ٣ = ٠.٣٠١٠ + ٠.٤٧٧١ = ٠.٧٧٨١

لو ٩ = لو $٣^{٢}$ = ٢ لو ٣ = ٢ × ٠.٤٧٧١ = ٠.٩٥٤٢

لو ١٢ = لو ٢ × ٦ = لو ٢ + لو ٦ = ٠.٣٠١٠ + ٠.٧٧٨١ = ١.٠٧٩١

لو ٠.٠٢ = لو (٢ ÷ ١٠٠) = لو ٢ ـ لو ١٠٠ = ٠.٣٠١٠ - ٢ = -١.٦٩٩٠

لو ٠.٠٢٧ = لو (٢٧ ÷ ١٠٠٠) = لو ٢٧ ـ لو ١٠٠٠ = لو $٣^{٣}$ ـ ٣

= ٣ لو ٣ - ٣ = ٣ × ٠.٤٧٧١ ـ ٣ = -١.٥٦٨٧

الصفحة الرئيسية

مثال أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(1) ٢ لو س ـ لو (س + ٢) = ٠

الحـــــــل

لو س^{٢} = لو (س + ٢)

س^{٢} = س + ٢

س^{٢} ـ س ـ ٢ = ٠

(س ـ ٢) (س + ١) = ٠

إما س = ٢ أو س = -١ وهذا مرفوض

∴ مجموعة الحل = { ٢ }

---

(2) لوس^{٢} = لو٣ + لو١٢

الحـــــــل

لوس^{٢} = لو ٣×١٢ = لو ٣٦ = لو٦ ^{٢}

٢ لو|س | = ٢ لو٦ بالقسمة على ٢

لو|س|= لو ٦

|س|= ٦

س = ± ٦

مجموعة الحل = { ٦ ، - ٦ }

حـــــل آخر

لو س^{٢} = لو ٣٦

∴ س^{٢} = ٣٦ بأخذ الجذر التربيعى

س = ± ٦

∴ مجموعة الحل = { ٦ ، - ٦ }

---

(٣) (لو س)^{٣} = لو س^{٩}

الحـــــــل

(لو س)^{٣} = ٩ لو س

(لو س)^{٣} ـــ ٩ لو س = ٠

لو س [(لوس)^{٢} ـــ ٩] = .

لو س (لوس – ٣) (لوس + ٣) =٠

إما لو س = ٠ ومنها س = ١

أو لوس = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أو لوس = -٣ ومنها س= ٠.٠٠١

∴ م ٠ ح = { ١ ، ١٠٠٠ ، ٠.٠٠١ }

مثال أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة الآتية :

(١) لو(س ÷ ٢) × لو (٢ ÷ س) = -١

الحـــــــــل

(لو س ــ لو ٢) (لو ٢ ــ لو س) = -١ بالضرب × -١

∴ (لو س ـ لو ٢) (لو س ـ لو ٢) = ١

(لوس ــ لو ٢) ^{٢} = ١ بأخذ الجذر التربيعى

لو س ـ لو ٢ = ± ١

إما لوس ــ لو٢ = ١ أو لو س ـــ لو ٢ = -١

لو س = لو ٢ + ١ | لو س = لو ٢ ـ ١

لو س = لو ٢ + لو ١٠ | لو س = لو ٢ ـ لو ١٠

لو س = لو(٢ × ١٠) | لو س = لو (٢ ÷ ١٠)

لو س = لو ٢٠ | لو س = لو ٠.٢

∴ س = ٢٠ | ∴ س = ٠.٢

∴ مجموعة الحل = { ٢٠ ، ٠.٢ }

مثال : إذا كانت س ، ص ، ع أعداد صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{\text{لو}_{س}\ ص} + \frac{\text{لو}_{ص}\ ع = ٣٧}{\text{لو}_{ع}\ ص}$ أوجد قيمة س ع

الحـــــــــل

$٤\ \text{لو}_{ص} س + ٧\ \text{لو}_{ص} ع = ٣\ \text{لو}_{ص} ع$

$\text{لو}_{ص} س^{٤} + \text{لو}_{ص} ع^{٧} = \text{لو}_{ص} ع^{٣}$

$\text{لو}_{ص} س^{٤}\ ع^{٧} = \text{لو}_{ص} ع^{٣}$

$س^{٤}\ ع^{٧} = ع^{٣}$ بالقسمة على $ع^{٣}$

$س^{٤}\ ع^{٤} = ١$

$س\ ع = ١$ أو $س\ ع = -١$ وهذا مرفوض

مثال : أوجد قيمة : لو(جتا θ) + لو(قا θ) إذا كانت θ ∈] ٠ ، ٩٠ ° [

الحـــــــــل

المقدار = لو (جتا θ قا θ)

= لو ١ = صفر

مثال : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

$س^{لوس} = ١٠٠ س$

الحـــــــــــل

∵ $س^{لوس} = ١٠٠ س$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $س^{لوس}$ = لو ١٠٠ س

لو س × لو س = لو ١٠٠ + لو س

$(لوس)^{٢} = ٢ +$ لو س

$(لوس)^{٢} -$ لو س $- ٢ = ٠$

(لو س $-$ ٢) (لو س + ١) = ٠

إما لو س = ٢ ومنها س= ١٠٠

أو لو س = - ١ ومنها س= ٠.١

∴ مجموعة الحل = { ١٠٠ ، ٠.١ }

اللوغاريتمات المعتادة

ايجاد اللوغاريتم المعتاد لعدد موجب معلوم :

مثال : أوجد باستخدام الآلة الحاسبة لو ٧.٨٢ مقرباً الناتج إلى أربع أرقام عشرية.

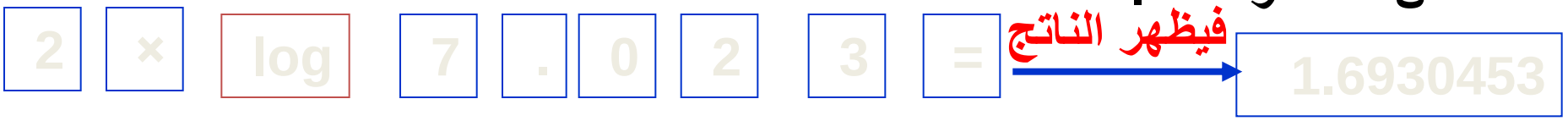
الحـــــل

لو ٧.٨٢ = ٠.٨٩٣٢

مثال : أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة س إذا كانت س = لو (٧.٠٢٣)^{٢} مقرباً الجواب إلى ثلاث أرقام عشرية.

الحـــــل

س = ٢ لو ٧.٠٢٣



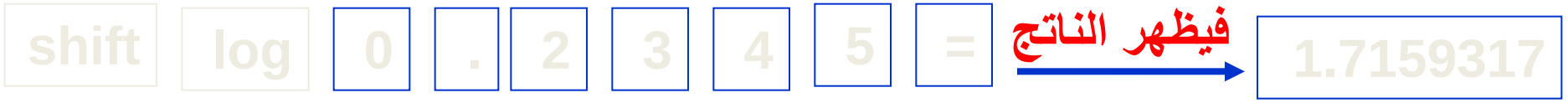
س = ١.٦٩٣

الصفحة الرئيسية

ايجاد العدد إذا علم لوغاريتمه المعتاد :

مثال : أوجد قيمة س إذا كان لو س = ٠.٢٣٤٥ مقرباً الجواب إلى أربع أرقام عشرية

الحـــــل



س = ١.٧١٥٩

مثال : أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة س إذا كانت لو $س^{٢}$ = ٠.٠٠٢٣٥

الحـــــل

٢ لو س = ٠.٠٠٢٣٥ بالقسمة على ٢

لو س = ٠.٠٠١٢٧٥

س = ١.٠٠٢٩٤

الصفحة الرئيسية

مثال: حل كل من المعادلات الآتية :-

(1) $س = (١٠٠٠)^{٠.٩٣١٢}$

الحـــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$لو\ س = لو\ (١٠٠٠)^{٠.٩٣١٢}$

$= ٠.٩٣١٢\ لو\ ١٠٠٠$

$= ٠.٩٣١٢ \times ٣$

$= ٢.٧٩٣٦$

$س = ٦٢١.٧٢٧٣$

(2) $٢^{س+١} = ٩$

الحـــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$لو\ ٢^{س+١} = لو\ ٩$

$(س + ١)\ لو\ ٢ = لو\ ٩$

$س\ لو\ ٢ + لو\ ٢ = لو\ ٩$

$س\ لو\ ٢ = لو\ ٩ - لو\ ٢$

بالقسمة على لو ٢

$$س = \frac{لو\ ٩ - لو\ ٢}{لو\ ٢}$$

$س = ٢.١٧$

الصفحة الرئيسية

(٣) $٣^{س+١} = ٢^{س-١}$

الحـــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

لو $٣^{س+١}$ = لو $٢^{س-١}$

(س + ١) لو ٣ = (س – ١) لو ٢

س لو ٣ + لو ٣ = س لو ٢ – لو ٢

س لو ٣ – س لو ٢ = - لو٣ – لو ٢

س (لو ٣ – لو ٢) = - لو ٣ – لو ٢

بالقسمة على (لو ٣ – لو ٢)

$$س = \frac{(- لو ٣ – لو ٢)}{(لو ٣ – لو ٢)}$$

س= - ٤.٤١٩

(٤) لو$_{س}$ (٥ س + ٦) = ٢

الحـــــل

$س^{٢} = ٥س + ٦$

$س^{٢} – ٥ س – ٦ = ٠$

(س – ٦) (س + ١) = ٠

إما س = ٦

إو س = - ١ وهذا مرفوض

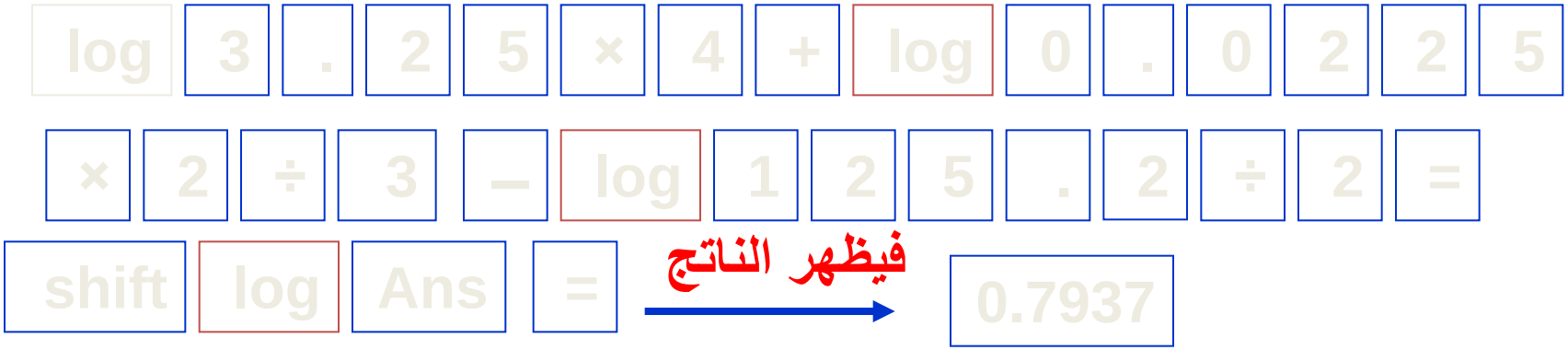
الصفحة الرئيسية

مثال : أوجد قيمة $\frac{(٣.٢٥)^{٤} \times (٠.٠٢٢٥)^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt{١٢٥.٢}}$

الحـــــل

نضع س = $\frac{(٣.٢٥)^{٤} \times (٠.٠٢٢٥)^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt{١٢٥.٢}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

لو س = ٤ لو ٣.٢٥ + $\frac{٢}{٣}$ لو ٠.٠٢٢٥ - $\frac{١}{٢}$ لو ١٢٥.٢



س = ٠.٧٩٤٦

الصفحة الرئيسية