الوحدة الرابعة : المتتابعات الحسابية والهندسية

إعداد الأستاذ / خالد سويسة

أهداف الوحدة

أن يكون الطالب قادراً على أن :

١- يتعرف على المتتابعة الحسابية.

٢- يتقن إيجاد الوسط الحسابى لعددين.

٣- يجيد إيجاد مجموع عدد "ن" من حدود متتابعة حسابية.

٤- يتعرف على المتتابعة الهندسية.

٥- يجيد إيجاد مجموع عدد "ن" من حدود متتابعة هندسية .

٦- يتعرف على المتتابعة الهندسية اللانهائية التنازلية.

الصفحة الرئيسية

دروس الوحدة

١ـ المتتابعة الحسابية

٢ـ الوسط الحسابى

٣ـ مجموع المتتابعة الحسابية

٤ـ المتتابعة الهندسية

٥ـ الوسط الهندسى

٦ـ مجموع المتتابعة الهندسية

٦ـ مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية التنازلية

الصفحة الرئيسية

المتتابعة الحسابية

تعريف:

المتتابعة الحسابية $(ح_ن) \Leftrightarrow ح_{ن+1} - ح_ن =$ مقدار ثابت لكل $ن \in ص^+$

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية : إذا فرض أن الحد الأول " أ" والأساس" ء" ، وعدد الحدود "ن" فإن :

$(ح_ن) = (أ ، أ + ء ، أ + 2ء ، أ + 3ء ، أ + 4ء ، ..... ، ح_ن)$

الحد العام (الحد النونى) $ح_ن = أ + (ن - 1) ء$

$ح_1 = أ$ ، $ح_2 = أ + ء$ ، $ح_3 = أ + 2ء$ ، $ح_4 = أ + 3ء$ ..... $ح_{10} = أ + 9ء$

مثال :(١) فى المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، .....) أوجد كلاً من

١- $ح_{10}$ ، $ح_{12}$ ، $ح_{20}$ ٢- أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٦٣

الحـــــــــل : أ = ٣ ، ء = ٧ – ٣ = ٤

$ح_{10} = أ + 9ء = 3 + 9 \times 4 = 39$

$ح_{12} = أ + 11ء = 3 + 11 \times 4 = 47$

$ح_{20} = أ + 19ء = 3 + 19 \times 4 = 79$

لإيجاد رتبة الحد الذى قيمته ٦٣ نضع $ح_ن = أ + (ن - 1) ء = 63$

$63 = 3 + (ن - 1) \times 4$

$63 = 3 + 4ن - 4 = 4 ن - 1$

$4ن = 64$ بالقسمة على ٤ فإن ن = ١٦ أى أن $ح_{16} = 63$

الصفحة الرئيسية

مثال(٢) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ٥ وحدها السادس ١١

الحـــل :

$ح_{٣} = ٥$

$أ + ٢ء = ٥$ ⟵ (١)

$ح_{٦} = ١١$

$أ + ٥ء = ١١$ ⟵ (٢)

بضرب المعادلة (١) × -١ وجمعها على المعادلة (٢)

$-أ - ٢ء = -٥$

$أ + ٥ء = ١١$

$٣ء = ٦$ فإن $ء = ٢$ بالتعويض فى (١)

$أ + ٤ = ٥$

$أ = ٥ - ٤ = ١$

$(ح_{ن}) = (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....)$

مثال (٣) إذا كان مجموع الحدين الأول والثالث فى متتابعة حسابية هو -٤٢ ومجموع حدودها الثلاثة السابع والثامن والتاسع -١٧١ أوجد المتتابعة

الحـــــــل: $أ + أ + ٢ء = -٤٢$

$٢أ + ٢ء = -٤٢$ بالقسمة على ٢

$أ + ء = -٢١$ ⟵ (١)

$ح_{٧} + ح_{٨} + ح_{٩} = -١٧١$

$أ + ٦ء + أ + ٧ء + أ + ٨ء = -١٧١$

$٣أ + ٢١ء = -١٧١$ بالقسمة على ٣

$أ + ٧ء = -٥٧$ ⟵ (٢)

بضرب المعادلة (١) × -١ وجمعها على (٢)

$-أ - ء = ٢١$

$أ + ٧ء = -٥٧$

$٦ء = -٣٦$ بالقسمة على ٦ نجد $ء = -٦$

بالتعويض فى (١) $أ - ٦ = -٢١$

$أ = -٢١ + ٦ = -١٥$

$(ح_{ن}) = (-١٥ ، -٢١ ، -٢٧ ، .....)$

ملاحظة هامة

١- لإيجاد رتبة أول حد موجب نضع $ح_{ن} > صفر$

٢- لإيجاد رتبة أول حد سالب نضع $ح_{ن} < صفر$

٣- لإيجاد رتبة الحد الذى قيمته ك نضع $ح_{ن} = ك$

مثال (٤) أوجد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، .....) وأوجد قيمته.

الحـــــــــــل

أ = ٩٥ ، ء = ٩٢ – ٩٥ = -٣

نضع أ + (ن - ١) ء < صفر

٩٥ + (ن – ١) × -٣ < ٠

٩٥ – ٣ن + ٣ < ٠

٩٨ – ٣ن < ٠

٣ن > ٩٨ بالقسمة على ٣

$ن > ٣٢\frac{٢}{٣}$

ن= ٣٣

أول حد سالب هو $ح_{٣٣}$

$ح_{٣٣} = أ + ٣٢ء = ٩٥ + ٣٢ \times -٣ = ٩٥ - ٩٦ = -١$

الوسط الحسابى

الوسط الحسابى لعددين

إذاكان (أ ، ب ، جـ) فى تتابع حسابى ⟺ ب وسط حسابياً بين أ ، جـ

جـ ـ ب = ب ـ أ

٢ب = أ + جـ بالقسمة على ٢

$$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$$

مثال (٥) أوجد الوسط الحسابى بين الكميتين ١٧ ، ٦٧

الحـــل

الوسط الحسابى = (١٧ + ٦٧) ÷ ٢ = ٨٤ ÷ ٢ = ٤٢

مثال (٦) أدخل خمسة عشر وسطاً حسابياً بين ٤٥ ، ـ١٩

الحـــل

أ = ٤٥ ، ن = ١٧ ، ل = ـ١٩

ل = أ + (ن ـ ١) ء

ـ١٩ = ٤٥ + (١٧ ـ ١) × ء

ـ١٩ = ٤٥ + ١٦ء

١٦ء = ـ١٩ ـ ٤٥ = ـ ٦٤ بالقسمة على ١٦

ء = ـ٤

∴ الأوساط هم

(٤١ ، ٣٧ ، ٣٣ ، ..... ، ـ١٥)

مجموع عدد "ن" من حدود متتابعة حسابية

بفرض أن $جـ_ن$ تعنى مجموع ن حداً من متتابعة حسابية

$ح_ن = (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ..... ، ل – ٢ء ، ل – ء ، ل)$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

أ، $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن – ١) ء]$

مثال (٧) متتابعة حسابية حدها الأول ٥ و أساسها ١.٥ أوجد حدها التاسع عشر منها ، ثم أوجد مجموع التسعة عشر حداً الأولى منها.

الحـــــل

$ح_{١٩} = أ + ١٨ء = ٥ + ١٨ \times ١.٥ = ٥ + ٢٧ = ٣٢$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$جـ_{١٩} = \frac{١٩}{٢} [٥ + ٣٢] = ٣٥١.٥$

مثال(٨) أوجد مجموع المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....، ٩٣)

الحـــــل

أ = ٣ ، ء = ٦ – ٣ = ٣ ، ل = ٩٣

ل = أ + (ن – ١) ء

٩٣ = ٣ + (ن – ١) × ٣ = ٣ + ٣ن – ٣ = ٣ن

ن = ٩٣ ÷ ٣ = ٣١ حداً

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ [أ + ل] = $\frac{٣١}{٢}$ [٣ + ٩٣] = $\frac{٣١}{٢}$ × ٩٦ = ١٤٨٨

مثال (٩) كم حداً يلزم أخذه من المتتابعة (٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ .....) ليكون المجموع ٩٦ ؟

الحـــــل

أ= ٣٠ ، ء = ٢٦ – ٣٠ = -٤ ، $جـ_ن$ = ٩٦

٩٦ = $\frac{ن}{٢}$ [٢×٣٠ + (ن – ١)×-٤]

= $\frac{ن}{٢}$ [٦٠ - ٤ن +٤]= $\frac{ن}{٢}$ [٦٤ – ٤ن]

٩٦ = ٣٢ن - ٢$ن^٢$ بالقسمة على ٢

$ن^٢$ – ١٦ن + ٤٨ = ٠

(ن – ١٢) (ن – ٤) =٠

أ، ن =١٢ أ، ن = ٤

مثال (١٠) حنفية تصب فى حوض ٤٠لتراً فى الساعة ثم بعد كل ساعة أخذت تصب فى الحوض بزيادة ٥ لتر فى كل ساعة عن الساعة التى قبلها. فبعد كم ساعة يكون بالحوض ٦٢٥لتراً ؟

الحـــــل

أ = ٤٠ ، ء = ٥ ، $جـ_ن$ = ٦٢٥

٦٢٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢×٤٠ + (ن – ١) ×٥]

بالضرب ×٢

١٢٥٠ = ن [٨٠ + ٥ن – ٥]

١٢٥٠ = ٧٥ن + ٥$ن^٢$ بالقسمة على ٥

$ن^٢$ + ١٥ن – ٢٥٠ = ٠

(ن – ١٠) (ن + ٢٥) = ٠

ن = ١٠ أ، ن = - ٢٥ وهذا مرفوض

∴ عدد الساعات = ١٠ ساعات

تمارين (١)

(1) أوجد كلاً من الحدين السابع و العاشر من كل من المتتابعات الآتية:

(أ) (١ ، ٣ ، ٥ ، .....)

(ب) (- ٩ ، - ١١ ، - ١٣ ، .....)

(٢) أدخل أحد عشر وسطاً حسابياً بين ٢٥ ، -١١

(٣) متتابعة حسابية حدها السادس ٤٩ وحدها التاسع ٧٠ أوجد الوسط الحسابى بين حديها الثالث وحدها العشرين

(٤) أوجد رتبة الحد الذى قيمته (-١٣) من المتتابعة الحسابية (١٦، ١٧ ، ١٥ ، .....)، ثم أوجد مجموع تلك الحدود ابتداء من الحد الأول حتى الحد الذى قيمته (-١٣).

(٥) أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع الـ ١٦ حداً الأولى منها ٢٨٨ ، ومجموع الـ ٢٠ حداً الأولى منها ٤٤٠.

(٦) اقتصد عامل فى سنة ما من أرباح مصنعه الذى تقاضاه مبلغ ٢٥٠٠ جنيه ، و أخذ يقتصد كل شهر ٥٠ جنيهاً زيادة على ما اقتصده فى الشهر السابق لكل شهر تالى له. فاحسب مجموع ما اقتصده فى ١٠ سنوات.

المتتابعة الهندسية

تعريف:

المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) $\Leftrightarrow$ $ح_{ن+1} \div ح_ن$ = مقدار ثابت لكل ن $\in$ ص$^+$

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية : إذا فرض أن الحد الأول " أ" والأساس" ر" ، وعدد الحدود "ن" فإن :

($ح_ن$)= (أ ، أ ر ، أ $ر^2$ ، أ $ر^3$ ، أ $ر^4$ ، .....، $ح_ن$)

،الحد العام (الحد النونى) $ح_ن$ = أ $ر^{ن-1}$

$ح_1$ = أ ، $ح_2$ = أ ر ، $ح_3$ = أ $ر^2$ ، $ح_4$ = أ $ر^3$ .....$ح_{10}$ = أ $ر^9$

مثال :(١) فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ،.....) أوجد كلاً من : $ح_6$ ، $ح_9$ ، $ح_{12}$

الحـــــــــل :

أ = ٣ ، ر = ٦ ÷ ٣ = ٢

$ح_6$ = أ $ر^5$ = ٣ × 2^5 = ٣٢×٣ = ٩٦

$ح_9$ = أ $ر^8$ = ٣ × 2^8 = ٣ × ٢٥٦ = ٧٦٨

$ح_{12}$ = أ $ر^{11}$ = ٣ × 2^{11} = ٣ × ٢٠٤٨ = ٦١٤٤

مثال(٢) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الخامس ١٢٥٠ وحدها الثانى ١٠

الحـــل :

$ح_{٥} = ١٢٥٠$

$أ ر^{٤} = ١٢٥٠$ ⟵ (١)

$ح_{٢} = ١٠$

$أ ر = ١٠$ ⟵ (٢)

بقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٢)

$$\frac{أ ر^{٤}}{أ ر} = \frac{١٢٥٠}{١٠}$$

$ر^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

$ر = ٥$ بالتعويض فى المعادلة (٢)

$أ \times ٥ = ١٠$ بالقسمة على ٥

$أ = ٢$

$ح_{ن} = (٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠ ، .....)$

مثال (٣) متتابعةهندسية مجموع حديها الثانى والثالث ٦ و مجموع حديها السادس والسابع ٤٨٦ أوجد النتتابعة.

الحـــــل: $ح_{٢} + ح_{٣} = ٦$

$أ ر + أ ر^{٢} = ٦$

$أ ر (١ + ر) = ٦$ ⟵ (١)

$ح_{٦} + ح_{٧} = ٤٨٦$

$أ ر^{٥} + أ ر^{٦} = ٤٨٦$

$أ ر^{٥}(١ + ر) = ٤٨٦$ ⟵ (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)

$$\frac{أ ر^{٥}(١ + ر)}{أ ر (١ + ر)} = \frac{٤٨٦}{٦}$$

$ر^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}$

$ر = \pm ٣$ بالتعويض فى (١)

عندما $ر = ٣$ فإن $أ \times ٣ \times ٤ = ٦$ نجد أن $أ = ٠.٥$

$(ح_{ن}) = (٠.٥ ، ١.٥ ، ٤.٥ ، .....)$

عندما $ر = -٣$ فإن $أ \times -٣ \times -٢ = ٦$ نجد أن $أ = ١$

$(ح_{ن}) = (١ ، -٣ ، ٩ ، .....)$

الوسط الهندسى

الوسط الهندسى لعددين

إذاكان (أ ، ب ، جـ) متتابعة هندسية ⟺ ب وسط هندسى بين أ ، جـ

جـ ÷ ب = ب ÷ أ

$ب^{٢}$ = أ × جـ

ب = ± $\sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}$ ⟺ ب وسط هندسى بين أ ، جـ

مثال (٤) أوجد الوسط الهندسى بين ٩ ، ١٦

الحـــل

الوسط الهندسى = ± $\sqrt{٩ \times ١٦}$ = ± $\sqrt{١٤٤}$ = ± ١٢

مثال (٥) أدخل وسطين هندسيين بين ٩ ، ٧٢

الحـــل

أ = ٩ ، ن = ٤ ، ل = ٧٢

ل = أ $ر^{ن-١}$

٧٢ = ٩ × $ر^{٣}$ بالقسمة على ٩

$ر^{٣}$ = ٨ = $٢^{٣}$

ر = ٢

الأوسطين هما (١٨ ، ٣٦)

مجموع عدد محدود من متتابعة هندسية

مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة الحد الأخير ل :

$$جـ = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$$

مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة عدد الحدود ن :

$$جـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

مثال (٦) أوجد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، .....)

الحـــــل

أ = ٢ ، ر = ٤ ÷ ٢ = ٢ ، ن = ٧

$$جـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ_{٧} = ٢ (٢^{٧} - ١) ÷ (٢ - ١) = ٢ × (١٢٨ - ١) ÷ ١ = ٢ × ١٢٧ = ٢٥٤$$

مثال(٧) أوجد الحد الثامن ومجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....)

الحـــل

أ = ٣ ، ر = ٦ ÷ ٣ = ٢

$ح_{٨} = أ ر^{٧} = ٣ \times ٢^{٧} = ٣ \times ١٢٨ = ٣٨٤$

$جـ_{ن} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$

$جـ_{٨} = \frac{٣ - ٢ \times ٣٨٤}{١ - ٢} = ٧٦٥ \div ١ = ٧٦٥$

مثال (٨) مجموع حدود متتابعة هندسية ٣٩٠٥ وحدها الأخير ٣١٢٥ وأساسها ٥ فما هو حدها الأول وعدد حدودها.

الحـــل

$جـ_{ن} = ٣٩٠٥$ ، ل = ٣١٢٥ ، ر = ٥

$٣٩٠٥ = \frac{٣١٢٥ \times ٥ - أ}{٥ - ١}$

$= \frac{١٥٦٢٥ - أ}{٤}$ بالضرب × ٤

$١٥٦٢٠ = ١٥٦٢٥ - أ$

$أ = ١٥٦٢٥ - ١٥٦٢٠ = ٥$

$ل = أ ر^{ن-١}$

$٣١٢٥ = ٥ \times ٥^{ن-١}$ بالقسمة على ٥

$٥^{ن-١} = ٦٢٥ = ٥^{٤}$

$ن - ١ = ٤$ فإن **ن = ٥**

مثال (٩) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثانى = ١٢ وحدها الخامس = ١.٥ ثم أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها.

الحـــل

$أ ر = ١٢$ ⟵ (١)

$أ ر^{٤} = ١.٥$ ⟵ (٢)

بقسمة (٢) على (١)

$ر^{٣} = ١/٨ = (٠.٥)^{٣}$

ر = ٠.٥ بالتعويض فى (١)

أ × ٠.٥ = ١٢ بالضرب × ٢

أ = ٢٤

المتتابعة هى ($ح_{ن}$)= (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، .....)

$جـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$جـ_{٦} = \frac{٢٤ \times [(٠.٥)^{٦} - ١]}{(٠.٥ - ١)}$

$جـ_{٦} = \frac{١٨٩}{٤}$

المتتابعات الهندسية اللانهائية التنازلية

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} \qquad \text{حيث } -١ < ر < ١$$

مثال(١٠) : أوجد مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية (١٦ ، ٨ ، ٤ ، .....)

الحـــــــــل

أ = ١٦ ، ر = ٨ ÷ ١٦ = ٠.٥

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$= \frac{١٦}{١ - ٠.٥} = ١٦ \div ٠.٥ = ٣٢$$

مثال(١١): أوجد مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية (٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، .....)

الحـــــــل

أ = ٣ ، ر = ١ ÷ ٣ = ١/٣

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$جـ_{\infty} = \frac{٣}{١ - ١/٣} = ٣ \div ٢/٣ = ٣ \times ٣/٢ = ٤.٥$$

مثال (١٢) : الحد الثانى من متتابعة لانهائية ٩ والحد الرابع ١ ، فما مجموعها ؟

الحـــــــل

أ ر = ٩ ⟵ (١)

أ ر^{٣} = ١ ⟵ (٢)

بقسمة (٢) على (١)

ر^{٢} = ١/٩ بأخذ الجذر التربيعى

ر = ± ١/٣ بالتعويض فى (١)

عندما ر = ١/٣

أ × ١/٣ = ٩ بالضرب × ٣

أ = ٢٧

عندما ر = -١/٣ بالتعويض فى (١)

أ × -١/٣ = ٩ بالضرب × ٣

أ = -٢٧

$جـ_{\infty} = ٢٧ \div (١ - ١/٣) = ٢٧ \times ٣/٢ = ٨١/٢$

$جـ_{\infty} = -٢٧ \div (١ + ١/٣) = -٢٧ \times ٣/٤ = -٨١/٤$

مثال(١٣): حول الكسر العشرى الدائرى ٠.٧٢ إلى كسر إعتيادى

الحـــــل

$$٠.\dot{٧}\dot{٢} = ٠.٧٢ + ٠.٠٠٧٢ + ٠.٠٠٠٠٧٢ + ٠.٠٠٠٠٠٠٧٢ + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

أ = ٠.٧٢ ، ر = ٠.٠١

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$$

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{٠.٧٢}{١ - ٠.٠١} = ٠.٧٢ \div ٠.٩٩ = ٨/١١$$

مثال(١٤) عددان وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٤ فما هما العددان ؟

الحـــــل

نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ١٠

ص = ١٠ – س ⟵ (١)

س ص = ١٦ ⟵ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

س (١٠ – س) = ١٦

١٠س - س^{٢} = ١٦

س^{٢} – ١٠س + ١٦ = ٠

(س – ٢) (س – ٨) = ٠

ومنها س = ٢ أ، س = ٨

بالتعويض فى (١)

عندما س = ٢ فإن ص = ٨

عندما س = ٨ فإن ص = ٢

العددان هما ٢ ، ٨

تمارين (٢)

(١) أوجد الحد التاسع من المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .....)
(٢) متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث ٦ و مجموع حديها السادس والسابع ٤٨٦ . أوجد المتتابعة ، ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.
(٣) أدخل ثلاثة أوساط هندسية بين ٤٨٦ ، ٦
(٤) كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً ٣٨١ ؟
(٥) أوجد مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية (٧٢ ، ٤٨ ، ٣٢ ، .....) .
(٦) متتابعة هندسية مجموع حديها الأول و الثانى ٨٠ ، وكل حد فيها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لانهاية . أوجد المتتابعة ومجموعها إلى ما لانهاية .
(٧) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة التى حدها النونى $ح_{ن} = (٣)^{ن-١}$
(٨) أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الثانى = ١٢ و حدها الخامس = ١.٥ ، ثم أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها .